Calcul d'espaces de Riemann–Roch pour les codes géométriques

Elena Berardini

avec S. Abelard (Thales), A. Couvreur (Inria), G. Lecerf (LIX)

Projet financé par l'Agence de l'Innovation de Défense

TU/e EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

EuroTechPostdoc2 Programme
Excellence in Science and Technology

Séminaire LFANT
8 mars 2022

Codes linéaires : des codes de Reed–Solomon...

Code linéaire : $\mathbb{F}_q$–sous espace vectoriel de $\mathbb{F}_q^n$

$[n, k, d]$–code : code de longueur **n**, dimension **k** et distance minimale **d**

Borne de Singleton : $k + d \leqslant n + 1$

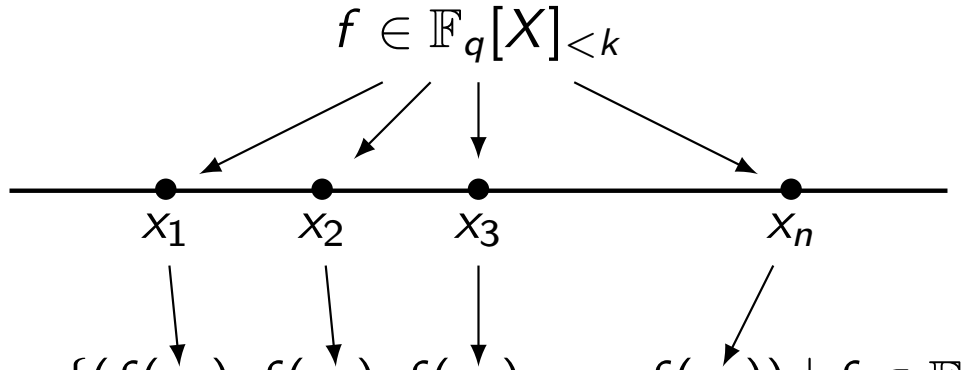
Codes linéaires : des codes de Reed–Solomon...

Code linéaire : $\mathbb{F}_q$–sous espace vectoriel de $\mathbb{F}_q^n$

$[n, k, d]$–code : code de longueur **n**, dimension **k** et distance minimale **d**

Borne de Singleton : $k + d \leqslant n + 1$

Codes de Reed–Solomon (codes RS) :



$$\mathrm{RS}_k(\mathbf{x}) := \{(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)) \mid f \in \mathbb{F}_q[X]_{<k}\}$$

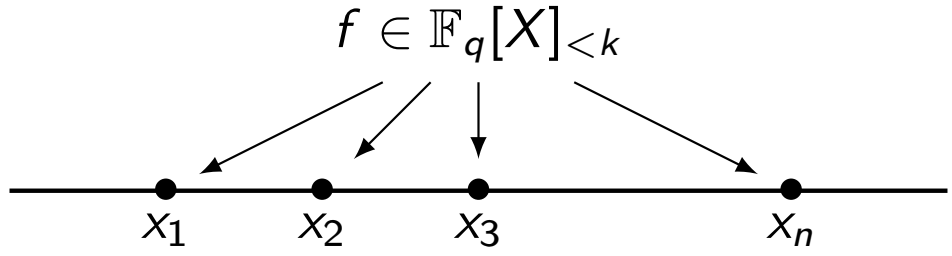
Codes linéaires : des codes de Reed–Solomon...

Code linéaire : $\mathbb{F}_q$–sous espace vectoriel de $\mathbb{F}_q^n$

$[n, k, d]$–code : code de longueur **n**, dimension **k** et distance minimale **d**

Borne de Singleton : $k + d \leqslant n + 1$

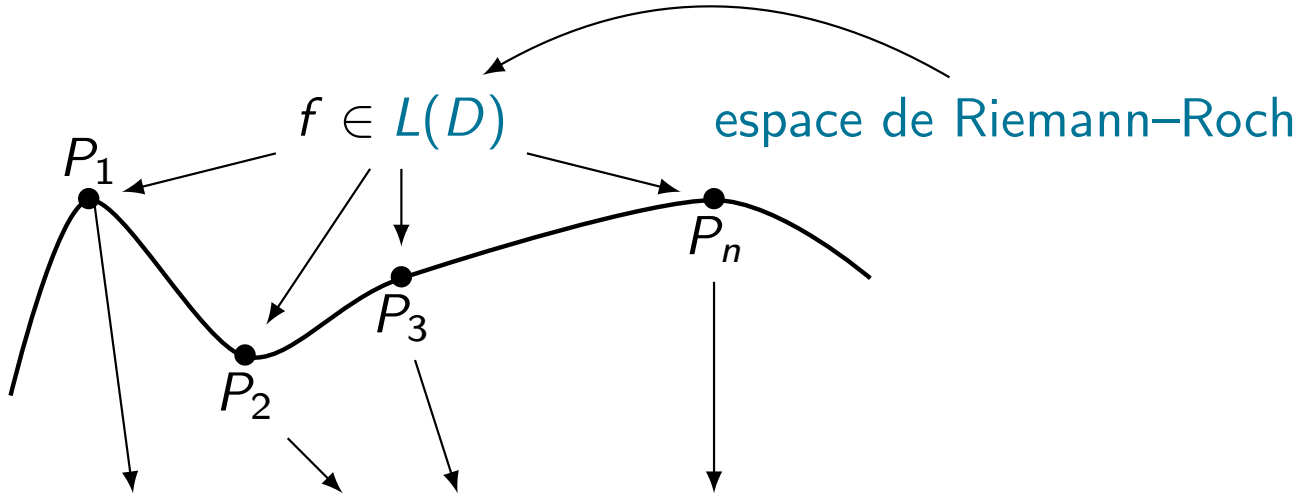
Codes de Reed–Solomon (codes RS) :



$$\mathrm{RS}_k(\mathbf{x}) := \{(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)) \mid f \in \mathbb{F}_q[X]_{<k}\}$$

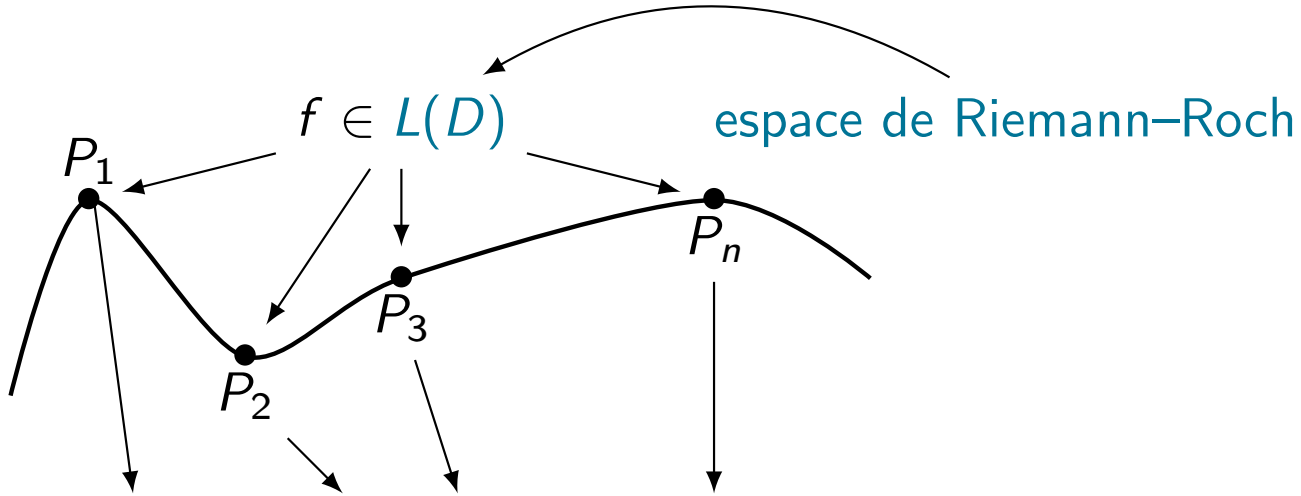
✓ Paramètres optimaux : $k + d = n + 1$ (codes MDS)
✓ Algorithme de décodage efficace (Berlekamp, 1968)
✓ Operations sur les données
⚠ Incovenient : $n \leqslant q$

...aux codes géométriques (codes AG)



$$\mathcal{C}((P_i)_i, D) := \{(f(P_1), f(P_2), f(P_3), \ldots, f(P_n)) \mid f \in L(D)\}$$

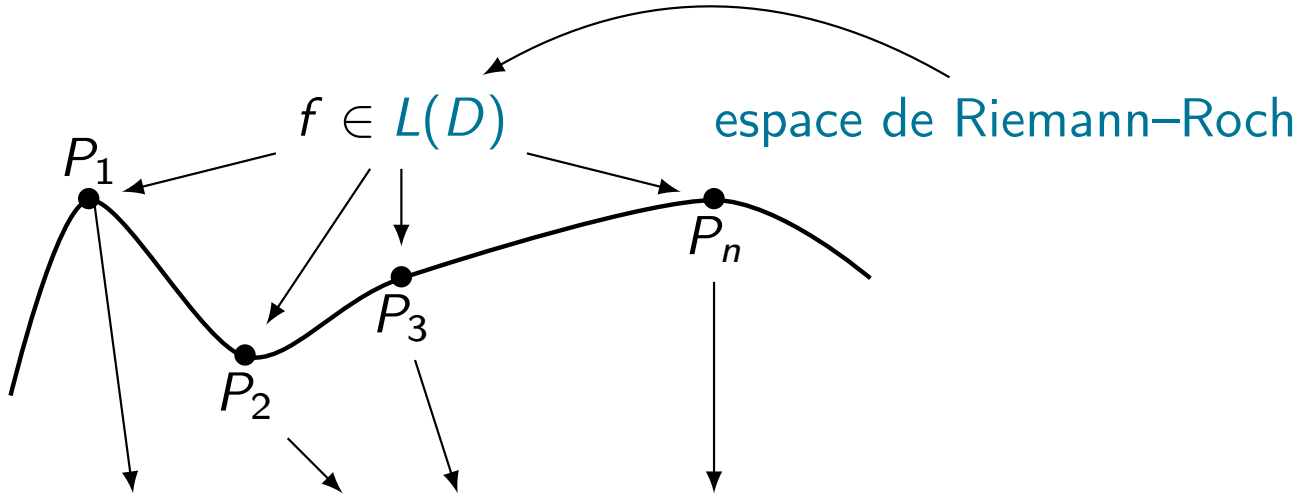
...aux codes géométriques (codes AG)



$$\mathcal{C}((P_i)_i, D) := \{(f(P_1), f(P_2), f(P_3), \ldots, f(P_n)) \mid f \in L(D)\}$$

Longueur : $|\#C(\mathbb{F}_q) - (q+1)| \leq g\lfloor 2\sqrt{q} \rfloor$

...aux codes géométriques (codes AG)



$$\mathcal{C}((P_i)_i, D) := \{(f(P_1), f(P_2), f(P_3), \ldots, f(P_n)) \mid f \in L(D)\}$$

Longueur : $|\#C(\mathbb{F}_q) - (q+1)| \leq g\lfloor 2\sqrt{q} \rfloor$

Proposition

Les paramètres $[n, k, d]$ *des codes géométriques satisfont*

$$n + 1 - g \leq k + d \leq n + 1.$$

$\rightsquigarrow$ les codes AG sont à distance g de l'optimalité

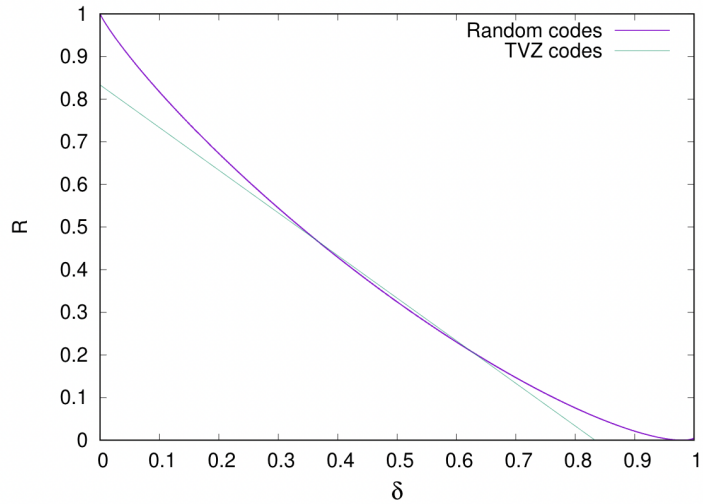
Bref histoire des codes géométriques

1981: Goppa introduit les codes AG sur les courbes algébriques

Bref histoire des codes géométriques

1981: Goppa introduit les codes AG sur les courbes algébriques

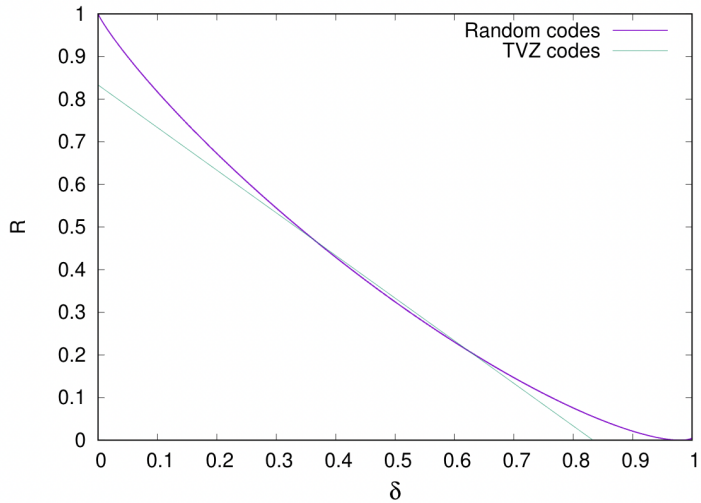
1982: Tsfasman, Vlăduț et Zink utilisent les codes AG pour dépasser la borne de Gilbert–Varshamov



Bref histoire des codes géométriques

1981: Goppa introduit les codes AG sur les courbes algébriques

1982: Tsfasman, Vlăduț et Zink utilisent les codes AG pour dépasser la borne de Gilbert–Varshamov



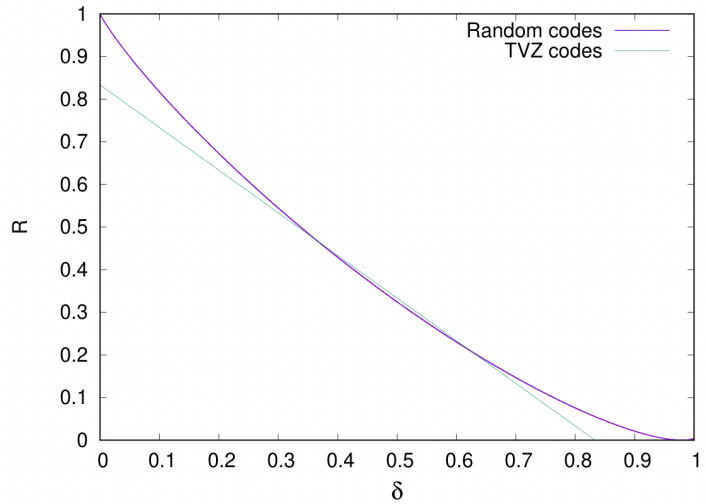
XXs : des different familles de courbes sont étudiées afin d'obtenir des codes AG avec des bons paramètres

↪ on utilise souvent les courbes dont les espaces de Riemann–Roch sont déjà connus (e.g. courbes Hermitiennes)

Bref histoire des codes géométriques

1981: Goppa introduit les codes AG sur les courbes algébriques

1982: Tsfasman, Vlăduț et Zink utilisent les codes AG pour dépasser la borne de Gilbert–Varshamov



XXs : des different familles de courbes sont étudiées afin d'obtenir des codes AG avec des bons paramètres

↪ on utilise souvent les courbes dont les espaces de Riemann–Roch sont déjà connus (e.g. courbes Hermitiennes)

XXIs : les codes AG sont utilisés dans des nouvelles applications en théorie de l'information

Espaces de Riemann–Roch : les codes AG et au–delà

Les codes AG interviennent dans le

- Partage de Secret [1]
- Calcul Vérifiable [2]
- autres applications

$\rightsquigarrow$ besoin de calculer les espaces de Riemann–Roch de courbes

[1] R. Cramer, M. Rambaud et C. Xing, Crypto 2021
[2] S. Bordage et J. Nardi, preprint 2020

Espaces de Riemann–Roch : les codes AG et au–delà

Les codes AG interviennent dans le

- Partage de Secret [1]
- Calcul Vérifiable [2]
- autres applications

$\rightsquigarrow$ besoin de calculer les espaces de Riemann–Roch de courbes

Utile aussi pour...

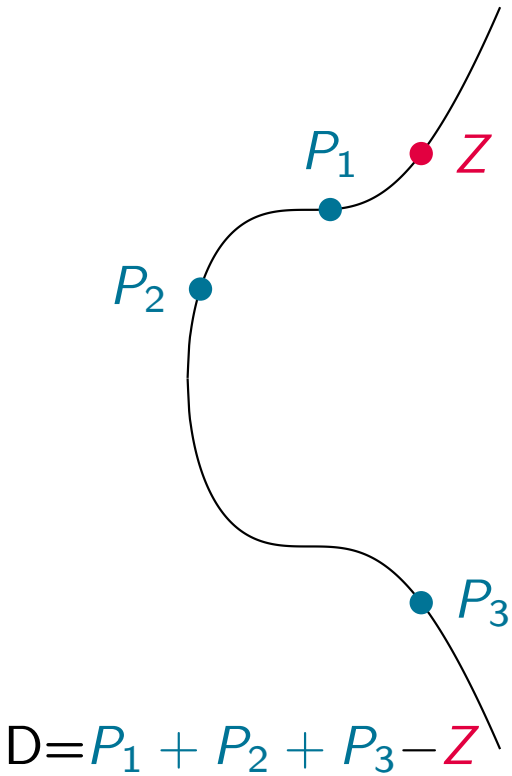
- Operations arithmétiques sur les Jacobiennes de courbes[3]
- Integration symbolique[4]

---

[1] R. Cramer, M. Rambaud et C. Xing, Crypto 2021
[2] S. Bordage et J. Nardi, preprint 2020
[3] K. Khuri-Makdisi, Mathematics of Computations, 2007
[4] J.H. Davenport, Intern. Symp. on Symbolic et Algebraic Manipulation, 1979

Espaces de Riemann–Roch

Un diviseur sur une courbe $\mathcal{C}$ c'est : $D = \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P, n_P \in \mathbb{Z}$



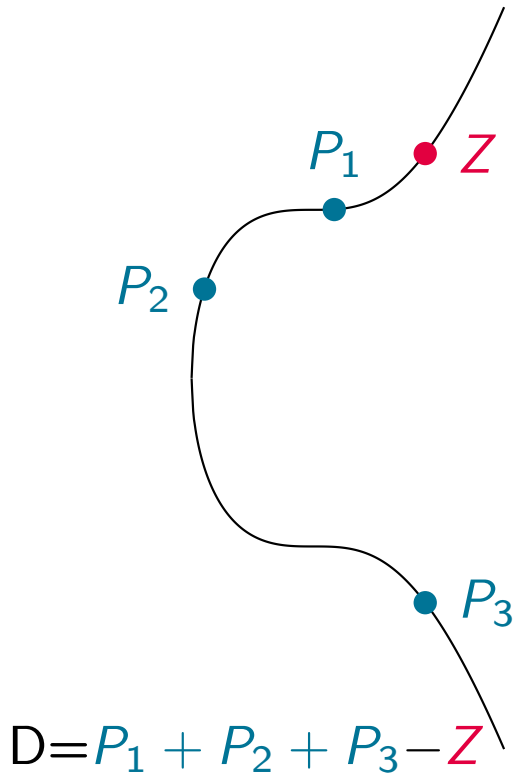
L'**espace de Riemann–Roch** $L(D)$ est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{G}{H} \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ telles que :

- si $n_P < 0$ alors P doit être un zéro de G (de multiplicité $\geqslant -n_P$)
- si $n_P > 0$ alors P peut être un zéro of H (de multiplicité $\leqslant n_P$)
- G/H n'a pas d'autres pôles en dehors des points P avec $n_P > 0$

Ici : Z doit être un zéro de G, les P_i peuvent être des zéros de H

Espaces de Riemann–Roch

Un diviseur sur une courbe $\mathcal{C}$ c'est : $D = \sum_{P \in \mathcal{C}} n_P P, n_P \in \mathbb{Z}$



L'**espace de Riemann–Roch** $L(D)$ est l'espace de toutes les fonctions de la forme $\frac{G}{H} \in \mathbb{K}(\mathcal{C})$ telles que :

- si $n_P < 0$ alors P doit être un zéro de G (de multiplicité $\geqslant -n_P$)
- si $n_P > 0$ alors P peut être un zéro of H (de multiplicité $\leqslant n_P$)
- G/H n'a pas d'autres pôles en dehors des points P avec $n_P > 0$

Ici : Z doit être un zéro de G, les P_i peuvent être des zéros de H

Théorème de Riemann–Roch $\rightsquigarrow \dim L(D) = \deg D + 1 - g$

où le degré d'un diviseur est $\deg D = \sum_P n_P$

Exemple jouet

Soit $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$, $P = [0:1]$ et $Q = [1:1]$. Soit $D = P - Q$, alors

$$f \in L(D) \iff \begin{cases} \text{f a un zéro d'ordre au moins 1 en } Q \\ \text{f peut avoir un pôle d'ordre au plus 1 en } P \\ \text{f n'a pas d'autres pôles en dehors de } P \end{cases}$$

Exemple jouet

Soit $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$, $P = [0:1]$ et $Q = [1:1]$. Soit $D = P - Q$, alors

$$f \in L(D) \iff \begin{cases} \text{f a un zéro d'ordre au moins 1 en } Q \\ \text{f peut avoir un pôle d'ordre au plus 1 en } P \\ \text{f n'a pas d'autres pôles en dehors de } P \end{cases}$$

$$f = \frac{X-1}{X} \text{ est une solution}$$

Exemple jouet

Soit $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$, $P = [0:1]$ et $Q = [1:1]$. Soit $D = P - Q$, alors

$$f \in L(D) \iff \begin{cases} \text{f a un zéro d'ordre au moins 1 en } Q \\ \text{f peut avoir un pôle d'ordre au plus 1 en } P \\ \text{f n'a pas d'autres pôles en dehors de } P \end{cases}$$

$$f = \frac{X-1}{X} \text{ est une solution}$$

$$g = 0, \deg D = 0 \xrightarrow[\text{Riemann–Roch}]{\text{Théorème de}} \dim L(D) = \deg D + 1 - g = 1$$

$$\rightarrow f \text{ engendre l'espace des solutions}$$

Exemple jouet

Soit $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$, $P = [0:1]$ et $Q = [1:1]$. Soit $D = P - Q$, alors

$$f \in L(D) \iff \begin{cases} \text{f a un zéro d'ordre au moins 1 en } Q \\ \text{f peut avoir un pôle d'ordre au plus 1 en } P \\ \text{f n'a pas d'autres pôles en dehors de } P \end{cases}$$

$$f = \frac{X-1}{X} \text{ est une solution}$$

$$g = 0, \deg D = 0 \xrightarrow[\text{Riemann–Roch}]{\text{Théorème de}} \dim L(D) = \deg D + 1 - g = 1$$

$$\rightarrow f \text{ engendre l'espace des solutions}$$

⚠ on n'a pas une méthode explicite pour calculer une base de $L(D)$
Comment résoudre le problème en général ?

Problème de Riemann–Roch : état de l'art

Méthode géométrique :
(Théorie de Brill–Noether ∼1874)

- Goppa, Le Brigand–Risler (80's)
- Huang–Ierardi (90's)
- Khuri–Makdisi (2007)
- Le Gluher–Spaenlehauer (2018)
- Abelard–Couvreur–Lecerf (2020)

Méthode arithmétique :
(Idéaux dans de corps de fonctions)

- Hensel–Landberg (1902)
- Coates (1970)
- Davenport (1981)
- Hess (2001)

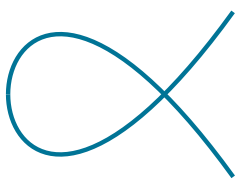
Problème de Riemann–Roch : état de l'art

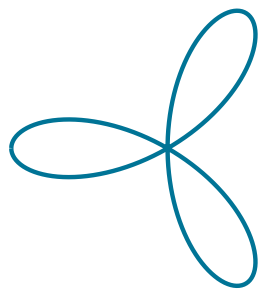
Méthode géométrique :
(Théorie de Brill–Noether ∼1874)
- Goppa, Le Brigand–Risler (80's)
- Huang–Ierardi (90's)
- Khuri–Makdisi (2007)
- Le Gluher–Spaenlehauer (2018)
- Abelard–Couvreur–Lecerf (2020)

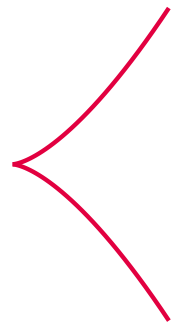
Méthode arithmétique :
(Idéaux dans de corps de fonctions)
- Hensel–Landberg (1902)
- Coates (1970)
- Davenport (1981)
- Hess (2001)

Courbes ordinaires/nodales : Algorithme Las Vegas qui calcule $L(D)$ en temps sous–quadratique

Courbes non–ordinaires : ⚠ aucun exposant de complexité explicite







Notations et hypothèses

$\mathcal{C} : F(x, y, z) = 0$ – courbe plane, F absolument irréductible de degré δ

$\mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ – les points singuliers de $\mathcal{C}$, supposés dans la carte affine $z = 1$

$\mathcal{C}$ ordinaire – tangents deux à deux distinctes à chaque point singulier

$(H) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \mathrm{ord}_P(H) P$ – diviseurs de zéros de H avec multiplicité

$D \geqslant D' \rightsquigarrow D - D' = \sum n_P P$ avec $n_P \geqslant 0 \ \forall P$ ($D - D'$ est *effectif*)

Notations et hypothèses

$\mathcal{C} : F(x, y, z) = 0$ – courbe plane, F absolument irréductible de degré δ

$\mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ – les points singuliers de $\mathcal{C}$, supposés dans la carte affine $z = 1$

$\mathcal{C}$ ordinaire – tangents deux à deux distinctes à chaque point singulier

$(H) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \mathrm{ord}_P(H) P$ – diviseurs de zéros de H avec multiplicité

$D \geqslant D' \rightsquigarrow D - D' = \sum n_P P$ avec $n_P \geqslant 0 \ \forall P$ ($D - D'$ est *effectif*)

$\mathbb{K}$ – corps parfait (caractéristique nulle ou positive)

$\mathbb{K}[[x]]$ – anneau de séries entières en x

$\mathbb{K}((x))$ – corps de séries de Laurent

$\overline{\mathbb{K}}\langle\langle x \rangle\rangle$ – corps de séries de Puiseux

Notations et hypothèses

$\mathcal{C} : F(x, y, z) = 0$ – courbe plane, F absolument irréductible de degré δ

$\mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ – les points singuliers de $\mathcal{C}$, supposés dans la carte affine $z = 1$

$\mathcal{C}$ ordinaire – tangents deux à deux distinctes à chaque point singulier

$(H) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \mathrm{ord}_P(H) P$ – diviseurs de zéros de H avec multiplicité

$D \geqslant D' \rightsquigarrow D - D' = \sum n_P P$ avec $n_P \geqslant 0 \ \forall P$ ($D - D'$ est *effectif*)

$\mathbb{K}$ – corps parfait (caractéristique nulle ou positive)

$\mathbb{K}[[x]]$ – anneau de séries entières en x

$\mathbb{K}((x))$ – corps de séries de Laurent

$\overline{\mathbb{K}}\langle\langle x \rangle\rangle$ – corps de séries de Puiseux

⚠ bien définies en caractéristique 0 ou positive "grande"

Méthode de Brill–Noether

Description de $L(D)$ pour $\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ courbe plane projective.

Les éléments non–nuls sont de la forme $\frac{G_i}{H}$ où

- *H satisfait $(H) \geqslant D$*
- *H s'annule en tout point singulier de $\mathcal{C}$ avec multiplicité ad hoc*
- $\deg G_i = \deg H$, *G_i copremier avec F et $(G_i) \geqslant (H) - D$*

Méthode de Brill–Noether

Description de $L(D)$ pour $\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ courbe plane projective.

Les éléments non–nuls sont de la forme $\frac{G_i}{H}$ où

- *H satisfait $(H) \geqslant D$*
- *H s'annule en tout point singulier de $\mathcal{C}$ avec multiplicité ad hoc*
- $\deg G_i = \deg H$, *G_i copremier avec F et $(G_i) \geqslant (H) - D$*

Comment gérer les points singuliers ?

Méthode de Brill–Noether

Description de $L(D)$ pour $\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ courbe plane projective.

Les éléments non–nuls sont de la forme $\frac{G_i}{H}$ où

- *H satisfait $(H) \geqslant D$*
- *H s'annule en tout point singulier de $\mathcal{C}$ avec multiplicité ad hoc*
- $\deg G_i = \deg H$, *G_i copremier avec F et $(G_i) \geqslant (H) - D$*

Comment gérer les points singuliers ?

✓ le diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$ "contient" les points singuliers de $\mathcal{C}$ avec leurs multiplicités

Méthode de Brill–Noether

Description de $L(D)$ pour $\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ courbe plane projective.

Les éléments non–nuls sont de la forme $\frac{G_i}{H}$ *où*

- H *satisfait* $(H) \geqslant D$
- H *satisfait* $(H) \geqslant \mathcal{A}$ *(on dira que "H est adjoint à la courbe")*
- $\deg G_i = \deg H$, G_i *copremier avec* F *et* $(G_i) \geqslant (H) - D$

Comment gérer les points singuliers ?

✓ le diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$ "contient" les points singuliers de $\mathcal{C}$ avec leurs multiplicités

Méthode de Brill–Noether

Description de $L(D)$ pour $\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ courbe plane projective.

Les éléments non–nuls sont de la forme $\frac{G_i}{H}$ où

- *H satisfait $(H) \geqslant D$*
- *H satisfait$(H) \geqslant \mathcal{A}$*
- $\deg G_i = \deg H$, *G_i copremier avec F et $(G_i) \geqslant (H) - D$*

Comment gérer les points singuliers ?

✓ le diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$ "contient" les points singuliers de $\mathcal{C}$ avec leurs multiplicités

Comment gérer les diviseurs ?

Méthode de Brill–Noether

Description de $L(D)$ pour $\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ courbe plane projective.

Les éléments non–nuls sont de la forme $\frac{G_i}{H}$ où

- *H satisfait $(H) \geqslant D$*
- *H satisfait$(H) \geqslant \mathcal{A}$*
- $\deg G_i = \deg H$, *G_i copremier avec F et $(G_i) \geqslant (H) - D$*

Comment gérer les points singuliers ?

✓ le diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$ "contient" les points singuliers de $\mathcal{C}$ avec leurs multiplicités

Comment gérer les diviseurs ?

expansions en séries de representations multi–set $((P_i)_i, n_i)$ $\rightsquigarrow$ opérations sur les diviseurs avec coût négligeable

Sketch de l'algorithme

Input

$\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ *une courbe plane projective,* D *un diviseur lisse.*

Étape 1 : Calcul du diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$

Étape 2 : Calcul du dénominateur commun H

Étape 3 : Calcul de $(H) - D$

Étape 4 : Calcul des numérateurs G_i (proche de l'étape 2)

Output

Une base de l'espace de Riemann–Roch $L(D)$ *en termes de* H *et des* G_i.

Sketch de l'algorithme

Input

$\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ *une courbe plane projective,* D *un diviseur lisse.*

Étape 1 : Calcul du diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$

Étape 2 : Calcul du dénominateur commun H

Étape 3 : Calcul de $(H) - D$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^2 + \deg D)$

Étape 4 : Calcul des numérateurs G_i (proche de l'étape 2)

Output

Une base de l'espace de Riemann–Roch $L(D)$ *en termes de* H *et des* G_i*.*

Sketch de l'algorithme

Input

$\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ *une courbe plane projective,* D *un diviseur lisse.*

Étape 1 : Calcul du diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$

Étape 2 : Calcul du dénominateur commun H

Étape 3 : Calcul de $(H) - D$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^2 + \deg D)$

Étape 4 : Calcul des numérateurs G_i (proche de l'étape 2)

Output

Une base de l'espace de Riemann–Roch $L(D)$ *en termes de* H *et des* G_i*.*

Échauffement: diviseur d'adjonction dans le cas ordinaire

Définition

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$. *Le diviseur d'adjonction local est*

$$\mathcal{A}_P = -\sum_{\mathcal{P}|P} \mathrm{val}_{\mathcal{P}}\left(\frac{dx}{F_y(x,y,1)}\right)\mathcal{P}.$$

Échauffement: diviseur d'adjonction dans le cas ordinaire

Définition

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$. *Le diviseur d'adjonction local est*

$$\mathcal{A}_P = -\sum_{\mathcal{P}|P} \mathrm{val}_{\mathcal{P}}\left(\frac{dx}{F_y(x,y,1)}\right)\mathcal{P}.$$

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ ordinaire de multiplicité m, wlog $P = (0:0:1)$. Alors F se factorise localement comme

$$F(x,y,1) = u(x,y)\prod_{i=1}^{m}(y-\varphi_i(x))$$

avec $u \in \overline{\mathbb{K}}[[x,y]]$ inversible, $\varphi_i(x) \in x\overline{\mathbb{K}}[[x]]$ et $\varphi_i'(0) \neq \varphi_j'(0)$.

Échauffement: diviseur d'adjonction dans le cas ordinaire

Définition

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$. *Le diviseur d'adjonction local est*

$$\mathcal{A}_P = -\sum_{\mathcal{P}|P} \mathrm{val}_{\mathcal{P}}\left(\frac{dx}{F_y(x,y,1)}\right)\mathcal{P}.$$

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ ordinaire de multiplicité m, wlog $P = (0:0:1)$. Alors F se factorise localement comme

$$F(x,y,1) = u(x,y)\prod_{i=1}^{m}(y-\varphi_i(x))$$

avec $u \in \overline{\mathbb{K}}[[x,y]]$ inversible, $\varphi_i(x) \in x\overline{\mathbb{K}}[[x]]$ et $\varphi_i'(0) \neq \varphi_j'(0)$.

Germe de courbe paramétré par $\varphi_i(x)$ $\longleftrightarrow$ place $\mathcal{P}_i$ dans le corps de fonctions $\overline{\mathbb{K}}(\mathcal{C})$

Échauffement: diviseur d'adjonction dans le cas ordinaire

Définition

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$. *Le diviseur d'adjonction local est*

$$\mathcal{A}_P = -\sum_{\mathcal{P}|P} \mathrm{val}_{\mathcal{P}}\left(\frac{dx}{F_y(x,y,1)}\right)\mathcal{P}.$$

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ ordinaire de multiplicité m, wlog $P = (0:0:1)$. Alors F se factorise localement comme

$$F(x,y,1) = u(x,y)\prod_{i=1}^{m}(y-\varphi_i(x))$$

avec $u \in \overline{\mathbb{K}}[[x,y]]$ inversible, $\varphi_i(x) \in x\overline{\mathbb{K}}[[x]]$ et $\varphi_i'(0) \neq \varphi_j'(0)$.

Germe de courbe paramétré par $\varphi_i(x)$ $\longleftrightarrow$ place $\mathcal{P}_i$ dans le corps de fonctions $\overline{\mathbb{K}}(\mathcal{C})$

Le *diviseur d'adjonction local* devient

$$\mathcal{A}_P = (m-1)\sum_{i=1}^{m}\mathcal{P}_i.$$

La condition d'adjonction via les séries de Puiseux

Soit $F \in \mathbb{K}[x, y]$ absolument irréductible, unitaire en y et de degré d en y. $F \in \mathbb{K}((x))[y]$ admet d racines distinctes dans $\overline{\mathbb{K}}\langle\langle x \rangle\rangle$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$, et s'écrit

$$F = \prod_{i=1}^{d} (y - \varphi_i) = \prod_{i=1}^{d} \left(y - \sum_{j=n}^{\infty} \beta_{i,j} x^{j/e_i} \right).$$

La condition d'adjonction via les séries de Puiseux

Soit $F \in \mathbb{K}[x, y]$ absolument irréductible, unitaire en y et de degré d en y. $F \in \mathbb{K}((x))[y]$ admet d racines distinctes dans $\overline{\mathbb{K}}\langle\langle x \rangle\rangle$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$, et s'écrit

$$F = \prod_{i=1}^{d} (y - \varphi_i) = \prod_{i=1}^{d} \left(y - \sum_{j=n}^{\infty} \beta_{i,j} x^{j/e_i} \right).$$

On fixe φ de degré e, ζ une racine primitive e-ème de l'unité. Pour $0 \leqslant k < e$ on peut construire autres e séries de Puiseux en remplaçant $x^{1/e}$ par $\zeta^k x^{1/e}$.

La condition d'adjonction via les séries de Puiseux

Soit $F \in \mathbb{K}[x, y]$ absolument irréductible, unitaire en y et de degré d en y. $F \in \mathbb{K}((x))[y]$ admet d racines distinctes dans $\overline{\mathbb{K}}\langle\langle x \rangle\rangle$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$, et s'écrit

$$F = \prod_{i=1}^{d} (y - \varphi_i) = \prod_{i=1}^{d} \left(y - \sum_{j=n}^{\infty} \beta_{i,j} x^{j/e_i} \right).$$

On fixe φ de degré e, ζ une racine primitive e-ème de l'unité. Pour $0 \leqslant k < e$ on peut construire autres e séries de Puiseux en remplaçant $x^{1/e}$ par $\zeta^k x^{1/e}$. Elles sont équivalentes et représentées par...

Définition

Une Expansion de Puiseux Rationnelle est un couple $(X(t), Y(t)) = \left(t^e, \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j t^j \right)$ *tel que* $F(X(t), Y(t)) = 0$

La condition d'adjonction via les séries de Puiseux

Soit $F \in \mathbb{K}[x,y]$ absolument irréductible, unitaire en y et de degré d en y. $F \in \mathbb{K}((x))[y]$ admet d racines distinctes dans $\overline{\mathbb{K}}\langle\langle x \rangle\rangle$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$, et s'écrit

$$F = \prod_{i=1}^{d}(y - \varphi_i) = \prod_{i=1}^{d}\left(y - \sum_{j=n}^{\infty}\beta_{i,j}x^{j/e_i}\right).$$

On fixe φ de degré e, ζ une racine primitive e-ème de l'unité. Pour $0 \leqslant k < e$ on peut construire autres e séries de Puiseux en remplaçant $x^{1/e}$ par $\zeta^k x^{1/e}$. Elles sont équivalentes et représentées par...

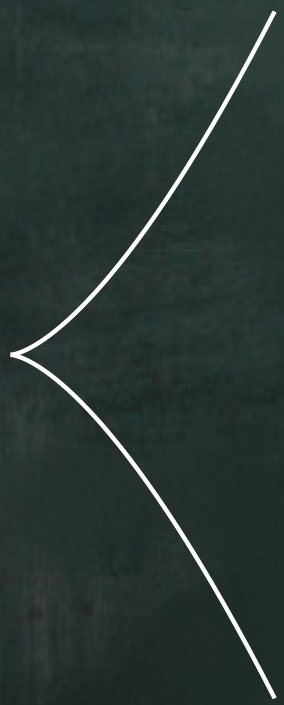
Définition

Une Expansion de Puiseux Rationnelle est un couple $(X(t), Y(t)) = \left(t^e, \sum_{j=n}^{\infty}\beta_j t^j\right)$ *tel que* $F(X(t), Y(t)) = 0$

Expansions de Puiseux Rationnelles de $F(x,y,1)$ $\longleftrightarrow$ places de $\overline{\mathbb{K}}(\mathcal{C})$ dans la carte $z = 1$

Exemple

$\mathcal{C} : y^2 - x^3 = 0$ dans la carte $z = 1$



Exemple

$\mathcal{C} : y^2 - x^3 = 0$ dans la carte $z = 1$

$(0, 0)$ unique point singulier, non ordinaire

Exemple

$\mathcal{C} : y^2 - x^3 = 0$ dans la carte $z = 1$

$(0, 0)$ unique point singulier, non ordinaire

Séries de Puiseux : $(y - x^{3/2})(y + x^{3/2}) = 0$

Exemple

$\mathcal{C} : y^2 - x^3 = 0$ dans la carte $z = 1$

$(0, 0)$ unique point singulier, non ordinaire

Séries de Puiseux : $(y - x^{3/2})(y + x^{3/2}) = 0$

(Unique) RPE : $(X(t), Y(t)) = (t^2, t^3)$

Exemple

$\mathcal{C} : y^2 - x^3 = 0$ dans la carte $z = 1$

$(0, 0)$ unique point singulier, non ordinaire

Séries de Puiseux : $(y - x^{3/2})(y + x^{3/2}) = 0$

(Unique) RPE : $(X(t), Y(t)) = (t^2, t^3)$

⚠les RPE sont souvent définies sur une extension de $\mathbb{K}$.
C'est une question algorithmique de prendre l'extension minimale du corps.

Le diviseur d'adjonction

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ ~~ordinaire~~, wlog $P = (0 : 0 : 1)$. Alors F se factorise localement comme

$$F(x, y, 1) = u(x, y) \prod_{i=1}^{m} (y - \varphi_i(x))$$

avec $u \in \mathbb{K}[[x, y]]$ inversible et φ_i series de Puiseux de $F \in \overline{\mathbb{K}}[[x]][y]$.

Le diviseur d'adjonction

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ ~~ordinaire~~, wlog $P = (0:0:1)$. Alors F se factorise localement comme

$$F(x, y, 1) = u(x, y) \prod_{i=1}^{m} (y - \varphi_i(x))$$

avec $u \in \mathbb{K}[[x, y]]$ inversible et φ_i series de Puiseux de $F \in \overline{\mathbb{K}}[[x]][y]$.

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{séries de Puiseux Rationnels/places } (X_i(t), Y_i(t)) \\ i \in \{1, \ldots, s\},\ s \leqslant m \end{array}$$

Le diviseur d'adjonction

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ ~~ordinaire~~, wlog $P = (0:0:1)$. Alors F se factorise localement comme

$$F(x, y, 1) = u(x, y) \prod_{i=1}^{m} (y - \varphi_i(x))$$

avec $u \in \mathbb{K}[[x, y]]$ inversible et φ_i series de Puiseux de $F \in \overline{\mathbb{K}}[[x]][y]$.

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{séries de Puiseux Rationnels/places } (X_i(t), Y_i(t)) \\ i \in \{1, \ldots, s\},\ s \leqslant m \end{array}$$

Le diviseur d'adjonction local devient

$$\mathcal{A}_P = -\sum_{\mathcal{P}|P} \mathrm{val}_t \left(\frac{e t^{e-1}}{F_y(X(t), Y(t), 1)} \right) \mathcal{P}.$$

Le diviseur d'adjonction

Soit $P \in \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$ ~~ordinaire~~, wlog $P = (0:0:1)$. Alors F se factorise localement comme

$$F(x, y, 1) = u(x, y) \prod_{i=1}^{m} (y - \varphi_i(x))$$

avec $u \in \mathbb{K}[[x, y]]$ inversible et φ_i series de Puiseux de $F \in \overline{\mathbb{K}}[[x]][y]$.

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{séries de Puiseux Rationnels/places } (X_i(t), Y_i(t)) \\ i \in \{1, \ldots, s\},\ s \leqslant m \end{array}$$

Le diviseur d'adjonction local devient

$$\mathcal{A}_P = -\sum_{\mathcal{P}|P} \mathrm{val}_t \left(\frac{e t^{e-1}}{F_y(X(t), Y(t), 1)} \right) \mathcal{P}.$$

Dans la pratique : algorithme pour les séries de Puiseux [5]

$\rightsquigarrow \mathcal{A}$ calculé avec $\tilde{O}(\delta^3)$ opérations

[5] A. Poteaux et M. Weimann, Annales Herni Lebesgue, 2021

Exemple

$\mathcal{C} : y^2 - x^3 = 0$ dans la carte $z = 1$

$(0, 0)$ unique point singulier, non ordinaire

Séries de Puiseux : $(y - x^{3/2})(y + x^{3/2}) = 0$

(Unique) RPE : $(X(t), Y(t)) = (t^2, t^3)$

Condition d'ajonction

$\mathrm{val}_t \left(\frac{et^{e-1}}{F_y(X(t),Y(t),1)} \right) =$

$\mathrm{val}_t \left(\frac{2t}{2t^3} \right) = \mathrm{val}_t \left(\frac{1}{t^2} \right) = -2$

H adjoint $\iff \mathrm{val}_t H(t^2, t^3) \geq 2$

Sketch de l'algorithme

Input

$\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ *une courbe plane projective,* D *un diviseur lisse.*

Étape 1 : Calcul du diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^3)$

Étape 2 : Calcul du dénominateur commun H

Étape 3 : Calcul de $(H) - D$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^2 + \deg D)$

Étape 4 : Calcul des numérateurs G_i (proche de l'étape 2)

Output

Une base de l'espace de Riemann–Roch $L(D)$ *en termes de* H *et des* G_i*.*

Sketch de l'algorithme

Input

$\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ *une courbe plane projective,* D *un diviseur lisse.*

Étape 1 : Calcul du diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^3)$

Étape 2 : Calcul du dénominateur commun H

Étape 3 : Calcul de $(H) - D$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^2 + \deg D)$

Étape 4 : Calcul des numérateurs G_i (proche de l'étape 2)

Output

Une base de l'espace de Riemann–Roch $L(D)$ *en termes de* H *et des* G_i.

Trouver un dénominateur en pratique

Algèbre linéaire classique

Soit $d = \deg H$.

Condition $(H) \geqslant \mathcal{A} + D$

$\rightsquigarrow$ système linéaire avec $\deg \mathcal{A} + \deg D \sim \delta^2 + \deg D$ équations

$\rightsquigarrow$ l'élimination de Gauss coûte

$$\tilde{O}((d\delta + \delta^2 + \deg D)^\omega) \text{ opérations sur } \mathbb{K}$$

Trouver un dénominateur en pratique

Algèbre linéaire classique

Soit $d = \deg H$.

Condition $(H) \geqslant \mathcal{A} + D$

$\rightsquigarrow$ système linéaire avec $\deg \mathcal{A} + \deg D \sim \delta^2 + \deg D$ équations

$\rightsquigarrow$ l'élimination de Gauss coûte

$$\tilde{O}((d\delta + \delta^2 + \deg D)^\omega) \text{ opérations sur } \mathbb{K}$$

Quelle taille a d?

On montre que $d = \left\lceil \frac{(\delta-1)(\delta-2)+\deg D}{\delta} \right\rceil$ est suffisant

$\rightsquigarrow$ dénominateur calculé avec $\tilde{O}((\delta^2 + \deg D)^\omega)$ opérations sur $\mathbb{K}$

Deuxième méthode : algèbre linéaire structurée

Condition $(H) \geqslant \mathcal{A}$

$$\rightsquigarrow \mathrm{val}_t(H(X(t), Y(t), 1) \geqslant \mathrm{val}_t \left(\frac{et^{e-1}}{F_y(X(t), Y(t), 1)} \right)$$

(équations similaires pour la condition $(H) \geqslant D$)

L'espace des polynômes $H(x, y, 1)$ qui satisfont ces conditions est un $\mathbb{K}[x]$-module

$\rightsquigarrow$ calculer une base[6] coûte $\tilde{O}((\delta^2 + \deg D)^\omega)$ opérations

[6] C.-P. Jeannerod, V. Neiger, É. Schost et G. Villard, Journal of Symbolic Computation, 2017

Deuxième méthode : algèbre linéaire structurée

Condition $(H) \geqslant \mathcal{A}$

$$\rightsquigarrow \mathrm{val}_t(H(X(t), Y(t), 1) \geqslant \mathrm{val}_t \left(\frac{et^{e-1}}{F_y(X(t), Y(t), 1)} \right)$$

(équations similaires pour la condition $(H) \geqslant D$)

L'espace des polynômes $H(x, y, 1)$ qui satisfont ces conditions est un $\mathbb{K}[x]$-module

$\rightsquigarrow$ calculer une base[6] coûte $\tilde{O}((\delta^2 + \deg D)^\omega)$ opérations

L'exposant de complexité est le même mais...

Avantages :

- meilleur exposant de complexité sur les corps algébriquement clos
- possibles améliorations dans le futur

[6] C.-P. Jeannerod, V. Neiger, É. Schost et G. Villard, Journal of Symbolic Computation, 2017

Sketch de l'algorithme

Input

$\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ *une courbe plane de degré* δ, D *un diviseur lisse.*

Étape 1 : Calcul du diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^3)$

Étape 2 : Calcul du dénominateur commun H ✓ $\leftarrow \tilde{O}((\delta^2 + \deg D)^\omega)$

Étape 3 : Calcul de $(H) - D$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^2 + \deg D)$

Étape 4 : Calcul des numérateurs G_i (proche de l'étape 2)

Output

Une base de l'espace de Riemann–Roch $L(D)$ *en termes de* H *et des* G_i.

Sketch de l'algorithme

Input

$\mathcal{C} : F(X, Y, Z) = 0$ *une courbe plane de degré* δ, D *un diviseur lisse.*

Étape 1 : Calcul du diviseur d'adjonction $\mathcal{A}$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^3)$

Étape 2 : Calcul du dénominateur commun H ✓ $\leftarrow \tilde{O}((\delta^2 + \deg D)^\omega)$

Étape 3 : Calcul de $(H) - D$ ✓ $\leftarrow \tilde{O}(\delta^2 + \deg D)$

Étape 4 : Calcul des numérateurs G_i ✓ $\leftarrow \tilde{O}((\delta^2 + \deg D)^\omega)$

Output

Une base de l'espace de Riemann–Roch $L(D)$ *en termes de* H *et des* G_i.

Théorème (Abelard, B., Couvreur, Lecerf – preprint 2021)

L'algorithme présenté calcule $L(D)$ *en* $\tilde{O}((\delta^2 + \deg D)^\omega)$ *opérations en* $\mathbb{K}$.

Quoi retenir ?

0. Codes géométriques $\rightsquigarrow$ besoin de calculer les espaces de Riemann–Roch $L(D)$

1. Méthode de Brill–Noether $\rightsquigarrow$ conditions nécessaires et suffisantes sur G et H pour que $G/H \in L(D)$

2. Séries de Puiseux $\rightsquigarrow$ gestion des points singuliers *non–ordinaires* de la courbe

3. Algèbre linéaire $\rightsquigarrow$ calcul de H et G en pratique

Quoi retenir ?

0. Codes géométriques $\rightsquigarrow$ besoin de calculer les espaces de Riemann–Roch $L(D)$

1. Méthode de Brill–Noether $\rightsquigarrow$ conditions nécessaires et suffisantes sur G et H pour que $G/H \in L(D)$

2. Séries de Puiseux $\rightsquigarrow$ gestion des points singuliers *non–ordinaires* de la courbe

3. Algèbre linéaire $\rightsquigarrow$ calcul de H et G en pratique

Resultat principal

Algorithme de type Las Vegas qui calcule $L(D)$ *en* $\tilde{\mathcal{O}}(((\deg \mathcal{C})^2 + \deg D)^\omega)$ *opérations*[7].

[7] $2 \leqslant \omega \leqslant 3$ est un exposant faisable pour l'algèbre linéaire ($\omega = 2.373$)

Questions futures

Calcul d'espaces de Riemann–Roch de courbes.

- Calcul d'espaces de Riemann–Roch de courbes non-ordinaires en caractéristique positive "petite" (en cours)
- Calcul d'espaces de Riemann–Roch associés à des diviseurs non lisses
- Implementation de l'algorithme
- Améliorer l'exposant de complexité dans le cas non–ordinaire (sous–quadratique ?)

Questions futures

Calcul d'espaces de Riemann–Roch de courbes.

- Calcul d'espaces de Riemann–Roch de courbes non-ordinaires en caractéristique positive "petite" (en cours)
- Calcul d'espaces de Riemann–Roch associés à des diviseurs non lisses
- Implementation de l'algorithme
- Améliorer l'exposant de complexité dans le cas non–ordinaire (sous–quadratique ?)

Dimension supérieure.

- Peut-on développer des techniques type "Brill–Noether" pour le calcul d'espaces de Riemann–Roch de surfaces ?

Questions futures

Calcul d'espaces de Riemann–Roch de courbes.

- Calcul d'espaces de Riemann–Roch de courbes non-ordinaires en caractéristique positive "petite" (en cours)
- Calcul d'espaces de Riemann–Roch associés à des diviseurs non lisses
- Implementation de l'algorithme
- Améliorer l'exposant de complexité dans le cas non–ordinaire (sous–quadratique ?)

Dimension supérieure.

- Peut-on développer des techniques type "Brill–Noether" pour le calcul d'espaces de Riemann–Roch de surfaces ?

Visitez : ScienceForUkraine

Merci de votre attention !

Des questions ? e.berardini@tue.nl